Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

Département de Mathématiques et Informatique

Cours d'Analyse I
Suites Numériques et Fonctions

SMA/SMI

---

par

N. Mrhardy

Chapitre 1

Les nombres réels

Sommaire

1 Introduction

Ce chapitre est indispensable à la bonne compréhension du cours, car $\mathbb{R}$ est d'une part l'espace fondamental de l'analyse et d'autre part se trouve être le modèle sur lequel les différentes notions du cours seront testées.

1.1 Rappels sur les ensembles

Nous supposerons connues les ensembles suivants, tous munis d'une addition, d'une multiplication, et d'une relation d'ordre $\leq$ compatibles entre elles.

- L'ensemble des entiers **naturels**, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Il vérifie le principe de récurrence, qu'on peut formuler de la manière suivante : Soit $\mathcal{P}(n)$ un énoncé dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et ayant un sens pour tout $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ (souvent $n_0 = 0$ ou 1). La démonstration par récurrence de $\mathcal{P}(n)$ comporte 2 étapes :
  (i) On montre d'abord que le résultat est vrai pour $n = n_0$.
  (ii) On démontre ensuite, en admettant que le résultat est vrai pour $n \geq n_0$, qu'il reste vrai pour $n+1$. On montre donc l'implication
  $$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \quad \forall n \geq n_0.$$
- L'ensemble des entiers **relatifs** $\mathbb{Z}$, union de $\mathbb{N}$ et des opposés des entiers non nuls : $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ introduit pour permettre la résolution de l'équation :
  $$x + n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$
- L'ensemble des nombres **rationnels** $\mathbb{Q}$ définie par
  $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$$
  introduit pour la résolution de l'équation
  $$qx + p = 0, \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

Remarque 1.1. *Tout rationnel peut s'écrire de manière unique sous forme de fraction **irréductible**, c'est-à-dire sous la forme*

$$\frac{p}{q}, \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \quad \text{et avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux } (p \wedge q = 1).$$

On rappelle que $\mathbb{Q}$ comprend $\mathbb{Z}$ et forme un corps pour l'addition et la multiplication, opérations qui étendent celles de $\mathbb{Z}$. En particulier on a les règles de calcul suivantes, si $\frac{p}{q}$ et $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ on a

$$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{qa + pb}{qb} \quad et \quad \frac{p}{q}\frac{a}{b} = \frac{ap}{bq}$$

L'addition et la multiplication sont donc des lois de composition internes dans $\mathbb{Q}$, on vérifie que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif (cf. cours algébre).

1.2 Insuffisance de Q.

Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs. En effet, il existe des longueurs dans le plan ne correspondant à aucun nombre rationnel. Par exemple, peut-on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur x de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à résoudre l'équation,

$$x^2 = 2.$$

$\mathbb{Q}$ s'est révélé insuffisant, puisqu'a été démontré qu'il n'existait pas de nombre rationnel x solution de cet équation (voir proposition ci-dessous).

Proposition 1.1. *Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.*

En effet ; supposons par l'absurde, qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ avec $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et que la fraction est sous une écriture irréductible, c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux. En élevant au carrée, on obtient

$$2q^2 = p^2$$

L'entier p^2 est donc pair ce qui signifi que p l'est aussi (à vérifier). Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$ et alors on a

$$2q^2 = p^2 = 4p'^2$$

Cela donne $q^2 = 2p'^2$ ce qui montre que q est également pair. Nous avons prouvé que 2 divise à la fois p et q. Cela rentre en contradiction avec le fait que p et q sont premiers entre eux. Notre hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.$\blacksquare$

1.3 Le corps des nombres réels

L'insuffisance de $\mathbb{Q}$ avait conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les **irrationnels**, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, noté $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels ,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$$

Parmi les irrationnels on distingue les algébriques, qui sont les racines des polynômes à coefficient entiers (par exemple $\sqrt{2}$ qui est racine de $x^2 - 2$), et les autres qu'on appelle les transcendants (exemples classiques : π et e).

Proposition 1.2. *On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ (qui prolongent celles de $\mathbb{Q}$), et d'une relation binaire $\leq$ telles que :*

1. *$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif de neutre 0.*
2. *$(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe commutatif de neutre 1.*
3. *La loi $\times$ est distributive par rapport à $+$.*
4. *Tout réel non nul possède un unique "inverse"*
5. *$\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.2.
- *Les quatres premiers points résument les règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$. Pour plus de détails sur la notion de groupe et du corps, voir le cours d'algèbre.*
- *On résume les 5 propiétés précédentes en disant que :*

$$(\mathbb{R}, +, \times) \ \textbf{\textit{est un corps commutatif totalement ordonné.}}$$

Notations : On note

$$x < y \Longleftrightarrow x \leq y \ et \ x \neq y$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}, \quad \text{l'ensemble des réels non nuls.}$$

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\}$$

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} | \ x \leq 0\}, \quad \mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R} | \ x < 0\}$$

1.4 Intervalles

Les intervalles de $\mathbb{R}$ jouent un rôle fondamental dans l'étude des fonctions numériques (fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$), tant du point de vue global (ensemble de définition) que local (voisinage).

On définit les ensembles suivants dits intervalles de $\mathbb{R}$

- L'ensemble vide $\emptyset$. (par convention)
- **Intervalles bornés :** (On désigne par a et b des réels $a < b$)
  - Intervalles ouverts bornés : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
  - Intervalles semi-ouverts bornés : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
  - Intervalles fermés bornés ou segment d'extrémités a et b : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
- **Intervalles non bornés :** (On désigne par a et b des réels)
  - Intervalles fermés non bornés
    - $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$

– Intervalles ouverts non bornés :
  - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
  - $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
  - $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Soit* I *une partie non vide de* $\mathbb{R}$*, On dit que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *si et seulement si tout réel compris entre deux éléments de* I *est lui-même élément de* I*, c'est à dire :*

$$\forall x, y \in \mathrm{I},\ \forall z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in \mathrm{I}.$$

(le segment qui joint deux points de I *est contenu dans* I*)*

Proposition 1.3. ***Caractérisation des intervalles***
Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, I est un intervalle si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathrm{I},\ \forall t \in [0,1],\ (1-t)x + ty \in \mathrm{I}.$$

Remarque 1.3. *Cette propriété s'appelle la convexité, autrement dit les parties convexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Démonstration. Exercice.

Exemples - $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\frac{3}{2}$. $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1. *On a les propriétés suivantes :*
- *L'intersection de deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
- *La réunion de deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *non disjoints ($I \cap J \neq \emptyset$) est un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Démonstration.
- Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, posons $K = I \cap J$. Si K est vide, alors c'est un intervalle. Si K n'est pas vide, alors soit $x, y \in K$ et soit z un réel tel que $x \leq z \leq y$. Comme I est un intervalle contenant x et y, I contient z, de même J contient z, finalement $z \in K$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Supposons I et J non disjoints et soit $K = I \cup J$. K est non vide, soit $x, y \in K$ et soit z un réel tel que $x \leq z \leq y$. Si x et y sont dans I, alors z est dans I et donc dans K, de même si x et y sont dans J. Si x est dans I et y dans J, soit $t \in I \cap J$, si $z \leq t$, alors z est compris entre x et t qui sont éléments de I, donc $z \in I$. Si $t \leq z$, alors z est compris entre t et y qui sont éléments de J, donc z est élément de J. Dans les deux cas on a bien $z \in K$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$. $\square$

1.5 Voisinages

Définition 1.2. *Soit x un réel. Une partie V de $\mathbb{R}$ est dite voisinage de x si et seulement si*

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < x < \beta \text{ tel que }]\alpha, \beta[\subset V$$

De façon équivalente une partie V est un voisinage de x dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$.

Notation : On note $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ est appelé voisinage de $+\infty$.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]-\infty, B[$ $(B \in \mathbb{R})$ est appelé voisinage de $-\infty$.*

Proposition 1.4. *On a les propriétés suivantes :*
- *Tout intervalle ouvert contenant x est un voisinage de x.*
- *Toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de x est un voisinage de x.*

1.6 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.4. *On appelle droite numérique achevée et l'on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$, obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux éléments distincts et régis par les loi suivantes :*
- *Prolongement de l'ordre de $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}; -\infty < x < +\infty$*
- *Prolongement de l'addition : Pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

- *Prolongement de la multiplication : $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$ et pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}$:*

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ et } x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas défini les opérations $0 \times (\pm\infty)$ ni $(-\infty) + (+\infty)$. Ces règles seront utilisé dans le chapitre sur les limites.

2 Caractérisation de $\mathbb{R}$ par la propriété de la borne supérieure

2.1 Majorants, minorants d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soient M et N des réels. On dit que*

- *M est un majorant de A (ou A est majorée par M) si $\forall x \in A, \quad x \leq M$.*
- *m est un minorant de A (ou A est minorée par m) si $\forall x \in A, \quad x \geq m$.*
- *A est bornée si elle est à la fois majoré et minoré.*

L'ensemble des majorants (resp. minorants) de A sera noté $\mathcal{M}(A)$ (resp. $\mathfrak{M}(A)$).

Remarque 2.1. *Il faut garder à l'esprit que le majorant ou le minorant n'existent pas toujours, en plus on n'a pas l'unicité.*

Exemple - L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majorée par 1 mais par tous les éléments de $[1, +\infty[$, par contre il n'est pas minoré.

2.2 Plus grand/petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2.2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soient M et N des réels. On dit que*

– *M est le plus grand élément (ou maximum) de A, si*

$$\begin{cases} M \text{ majore } A \\ M \in A \end{cases}$$

– *N est le plus petit élément (ou minimum) de A, si*

$$\begin{cases} N \text{ minore } A \\ N \in A \end{cases}$$

Remarque 2.2. *Comme pour le majorant et le minorant, il n'existe pas toujours de maximum ni de minimum, par contre on a l'unicité :*

Théorème 2.1. *Si A posséde un plus grand (resp. petit) élément, celui ci est unique. On le note alors $\max A$ (resp. $\min A$).*

Démonstration. Soient $M, M' \in \mathbb{R}$. On suppose que M et M' deux plus grands éléments de A. Alors par définition on aura

$$M \leq M' \text{ et } M' \leq M \Longrightarrow M = M' \qquad \square$$

Exemples

1. $\max[0, 1] = 1$, $\min[0, 1] = 0$
2. $]0, 1[$ **n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.**

3. **$[0,1[$ a pour plus petit élément 0 et n'a pas de plus grand élément.**
4. **Soit** $A=\left\{1-\frac{1}{n}/n\in\mathbb{N}^*\right\}$**. Notons** $u_n=1-\frac{1}{n}$ **alors** $A=\{u_n/n\in\mathbb{N}^*\}$
   - A **n'a pas de plus grand élément : Supposons qu'il existe un plus grand élément** $M=maxA$**. On aurait alors** $u_n\leq M$**, pour tout** u_n **donc** $M\geq 1-\frac{1}{n}$ **. Faisant tendre** $n\longrightarrow+\infty$ **cela implique** $M\geq 1$**. D'autre part, comme** M **est le plus grand élément de** A **alors** $M\in A$**. Donc il existe** n_0 **tel que** $M=u_{n_0}$ **. Mais alors** $M=1-\frac{1}{n_0}<1$**. Ce qui est en contradiction avec** $M\geq 1$**. Donc** A **n'a pas de maximum.**
   - $\min A=0$**. En effet, il y a deux choses à vérifier tout d'abord pour** $n=1$**,** $u_1=0$ **donc** $0\in A$**. Ensuite pour tout** $n\geq 1$**,** $u_n\geq 0$**. Ainsi** $\min A=0$**.**

2.3 Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 2.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si l'ensemble des majorants de A n'est pas vide et s'il admet un plus petit élément, alors celui-ci est appelé borne supérieure de A et noté* $\sup(A)$*. La borne supérieure (lorsqu'elle existe) est donc le plus petit des majorants.i.e*

$$\sup(A)=\min\mathcal{M}(A)$$

2. *Si l'ensemble des minorants de A n'est pas vide et s'il admet un plus grand élément, alors celui-ci est appelé borne inférieure de A et noté* $\inf(A)$*. La borne inférieure (lorsqu'elle existe) est donc le plus grand des minorants. i.e*

$$\inf(A)=\max\mathfrak{M}(A)$$

Exemples -

1. $A=]0,1]$**, l'ensemble des majorants est** $[1,+\infty[$**, celui-ci admet un plus petit élément qui est 1, donc** $\sup(A)=1$**. L'ensemble des minorants de** A **est** $]-\infty,0]$ **qui admet un plus grand élément : 0, donc** $\inf(A)=0$**.**
2. $A=]1,+\infty[$**, l'ensemble des majorants est vide donc** A **n'a pas de borne supérieure. L'ensemble des minorants est** $]-\infty,1]$**, donc** $\inf(A)=1$**.**

Voici le lien entre maximum et borne supérieure (ou minimum et borne inférieure) :

Théorème 2.2. *Si A posséde un plus grand (resp. petit) élément, alors A posséde une borne supérieure (resp. inférieure), de plus*

$$\sup A=\max A\quad(resp.\inf A=\min A)$$

Démonstration. Nous devons montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de A posséde un plus petit élément-alors A possédera une borne supérieure-et qu'en fait ce plus petit élément est $\max A$, on aura donc $\sup A=\max A$. Deux chose à vérifier donc :

– que $\max A \in \mathcal{M}$: or par définition, $\max A$ majore A
– que $\max A$ minore $\mathcal{M}$: or par définition $\max A \in A$. □

Donnons des caractérisations des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble, permettant de reconnaître si un réel est bien le sup ou inf d'un ensemble donné A :

Proposition 2.1. *(Caractérisation de la borne supérieure)*
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel. Il y a équivalence entre :

1. *α est la borne supérieure de A.*
2. *(i) $\forall x \in A, \quad x \leq \alpha$ et (ii) $\forall y < \alpha, \ \exists x \in A, \quad y < x \leq \alpha$.*

On écrit souvent (ii) sous la forme

$$(ii)' \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \ \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$$

Où de façon équivalente

$$(ii)'' \ \forall n \geq 1, \exists x \in A, \ \alpha - \frac{1}{n} < x \leq \alpha$$

Exemple - Reprenons l'exemple de la partie $A = \left\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$**.**
Montrons que $\sup A = 1$ **en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.**

(i) si $x \in A$**, alors** $x \leq 1$ **(1 est bien un majorant de** A**) ;**

(ii) pour tout $y < 1$**, il existe** $x \in A$ **tel que** $y < x$ **: en effet prenons** n **suffisamment grand tel que** $0 < \frac{1}{n} < 1 - y$**. Alors on a** $y < 1 - \frac{1}{n} < 1$**. Donc** $x = 1 - \frac{1}{n} \in A$ **convient. Par la caractérisation de la borne supérieure,** $\sup A = 1$**.**

Démonstration.

1. Montrons que $\sup A$ vérifie ces deux propriétés (i) et (ii). La borne supérieure est en particulier un majorant, donc vérifie (i). Pour (ii), fixons $y < \sup A$. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A alors y n'est pas un majorant de A. Donc il existe $x \in A$ tel que $y < x$. Autrement dit $\sup A$ vérifie également la seconde propriété.

2. Montrons que réciproquement si un nombre α vérifie ces deux propriétés, alors il s'agit de $\sup A$. La première propriété montre que α est un majorant de A. Supposons par l'absurde que α n'est pas le plus petit des majorants. Il existe donc un autre majorant y de A vérifiant $y < \alpha$. La deuxième propriété montre l'existence d'un élément x de A tel que $y < x \leq \alpha$, ce qui contredit le fait que y est un majorant de A. Cette contradiction montre donc que α est bien le plus petit des majorants de A, à savoir $\sup A$.

3. $(ii)'$ est une réécritures de (ii) , car un réel y vérifie $y < \sup A$ si et seulement si l $\sup A - y > 0$ c'est-à-dire si et seulement si on peut écrire $y = \sup A - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. □

On peut aussi donner une version pour la borne inférieure

Proposition 2.2. *(Caractérisation de la borne inférieure)*
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et β un nombre réel. Il y a équivalence entre :

1. *β est la borne inférieure de A.*
2. *(i) $\forall x \in A, \quad \beta \leq x \quad$ et $\quad (ii)$ $\forall y > \beta, \ \exists x \in A, \quad \beta < x \leq y$.*

On écrit souvent (ii) sous la forme

$$(ii)' \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \ \beta \leq x < \beta + \varepsilon$$

Où de façon équivalente :

$$(ii)'' \ \forall n \geq 1, \exists x_n \in A, \ \beta \leq x_n < \beta + \frac{1}{n}$$

Démonstration. Identique à celle de la proposition précédente. □
Exemple - En utilisant la caractérisation de la borne inférieure, nous allons montrer que

$$\inf \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0.$$

Notons $B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{1}{n}$$

et donc (i) est vérifié. Vérifions maintenant (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\varepsilon > \frac{1}{n_0}.$$

Cette inégalité est équivalente à

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or l'entier $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ vérifie cette inégalité et (ii) est vérifiée.

Théorème 2.3. *(Opération sur les bornes supérieures)*
On suppose que A et B possédent chacune une borne supérieure.

(i) Si $A \subset B$ alors : $\sup A \leq \sup B$.
(ii) L'ensemble $A \bigcup B$ posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup A \bigcup B = \max \{\sup A, \sup B\}$$

(iii) L'ensemble $A + B$ posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

(iv) Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble λA posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

Démonstration.

(i) Pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc $x \leq \sup B$ donc $\sup B$ majore A, d'où $\sup A \leq \sup B$.

(ii) Pour tout $x \in A \bigcup B$ si $x \in A$ alors $x \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\}$, et de même, si $x \in B$ alors $x \leq \sup B \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Bref, $\max\{\sup A, \sup B\}$ majore $A \bigcup B$.
Soit $s < \max\{\sup A, \sup B\}$. Alors $s < \sup A$ où $s < \sup B$, donc s ne majore pas A ou s ne majore pas B, donc il existe $x \in A \bigcup B$ tel que $s < x$, ce qui prouve que s ne majore pas $A \bigcup B$.
Conclusion : $\max\{\sup A, \sup B\}$ est le plus petit majorant de $A \bigcup B$, donc $\sup(A \bigcup B)$ existe et vaut $\max\{\sup A, \sup B\}$.

(iii) exercice.

(iv) exercice. $\square$

2.4 Propriété de la borne supérieure

Le résultat qui suit est une propriété essentielle de l'ensemble des réelles. Directement ou non, c'est de lui que nous allons déduire tous les grands théorèmes de programme : Théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano weiertstrass....
Le probléme posé est simple : déterminer quelles partiers de $\mathbb{R}$ possédent une borne supérieure. Avant d'énoncer le théorème d'existence de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, montrons que la borne supérieure n'existe pas toujours.

Exercice 1. *Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$*

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}.$$

Montrer que A est majorée mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration. C'est un sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}$ car, par exemple, $\frac{3}{2}$ est un majorant de A et $-\frac{3}{2}$ est un minorant de A. On peut facilement vérifier que l'ensemble des majorants de A dans $\mathbb{Q}$ est définie par

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathbb{Q} / M > \sqrt{2}\}$$

Soit alors M un majorant de A dans $\mathbb{Q}$. Posons

$$M' = \frac{M^2 + 2}{2M}$$

Nous allons vérifier que M' est un autre majorant (dans $\mathbb{Q}$) et que $M' < M$, ce qui prouve qu'il n'y a pas de plus petit majorant.

Montrons que M' est un majorant : il suffit de voir que $M'^2 > 2$. On calcule

$$M'^2 - 2 = \frac{(M^2+2)^2}{4M^2} - 2 = \frac{M^4 - 4M^2 + 4}{4M^2} = \frac{(M^2-2)^2}{4M^2} > 0$$

car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ d'où $M^2 - 2 \neq 0$ dans $\mathbb{Q}$.
Il reste à vérifier que $M' < M$. Calculons

$$M - M' = M - \frac{M^2+2}{2M} = \frac{M^2-2}{2M} > 0$$

d'où le résultat.$\square$

Proposition 2.3. ***(La propriété de la borne supérieure)***
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

La propriété de la borne supérieure est très importante mais on peut omettre la démonstration assez technique
Démonstration. Soit E un ensemble non vide majoré de réels on va construire des intervalles emboités $I_n = [a_n, b_n]$ tels que l'intersection contienne au plus un point (et donc exactement un point) qui sera la borne supérieure. Soit $e \in E$ et M un majorant de E, on pose $I_0 := [e, M]$. Pour construire I_1 on distingue deux cas : si $\dfrac{M+e}{2}$ est un majorant de E on choisit $a_1 = e$ et $b_1 = \dfrac{M+e}{2}$; sinon il existe dans E un élément qui est plus grand que $\dfrac{M+e}{2}$ et on choisit a_1 égal à cet élément et $b_1 = M$. En itérant ce procédé on obtient une suite décroissante d'intervalles $I_n = [a_n, b_n]$ tels que b_n soit un majorant de E, tel que a_n soit un élément de E et tel que $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \dfrac{|a_n - b_n|}{2}$ donc $|a_n - b_n| \leq \frac{(M-e)}{2^n}$.
Montrons maintenant qu'il ne peut y avoir qu'un seul point dans l'ensemble $S := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et que c'est la borne supérieure. Tout d'abord soit $s, t \in S$ alors ces deux nombres appartiennent aussi à I_n donc, pour tout n on a $|s - t| \leq \dfrac{(M-e)}{2^n}$ donc $|s - t| = 0$ et $s = t$. Par construction la suite des a_n comme celle des b_n converge vers s. Comme tous les b_n sont des majorants de E, s est aussi un majorant de E ; comme tous les a_n sont des éléments de E, on a que s est le plus petit majorant.

Conséquence : Il en découle que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.
Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par un réel m, alors l'ensemble $-A = \{-a/a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par le réel $-m$. D'après le théorème précédent, $-A$ admet une borne supérieure M et donc l'ensemble des majorants de $-A$ est $[M, +\infty[$, on en déduit que l'ensemble des minorants de A est $]-\infty, -M]$ et donc A admet une borne inférieure qui est $-M$, c'est à dire $\inf(A) = -\sup(-A)$. $\square$

Proposition 2.4. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée dans $\mathbb{R}$ alors admet une borne supérieure réelle (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$). Si A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des majorants est $\{+\infty\}$, donc il y a une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est $\{+\infty\}$ (le plus petit majorant). Le raisonnement est le même pour la borne inférieure.$\square$

3 Approximation d'un réel

3.1 Valeur absolue

Soit x un réel, les deux nombres x et $-x$ sont comparables puisque l'ordre est total, ce qui donne un sens à la définition suivante :

Définition 3.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \max(x, -x)$. On a donc*

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

La quantité $d(x, y) = |x - y|$ mesure la distance entre deux réels x et y.

On tire de cette définition les conséquences immédiates suivantes valables pour tout réel :

$$|x| = |-x|, \ -|x| \leq x \leq |x|, \ et \ |x|^2 = x^2.$$

Remarque 3.1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être assimilé à une droite graduée (i.e. munie d'un repère $(O, \overrightarrow{u})$, les réels sont alors les abscisses des points de cette droite. Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points de cette droite, alors le réel positif $d(a, b)$ représente la distance de A à B, en particulier $|x|$ représente la distance de l'origine au point d'abscisse x.*

Le résultat suivant et son corollaire donnent les règles, très importantes, concernant la valeur absolue en relation avec un produit, une somme et une différence de réels. Ces règles nous permettrons de majorer, minorer, comparer c'est à dire de faire un travail d'analyse sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.1. *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes (qui sont celles d'une norme) :*

$$\begin{aligned} &N_1 : |x| = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ &N_2 : |xy| = |x||y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &N_3 : |x + y| \leq |x| + |y| \ (\textit{inégalité triuangulaire}) \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons montrer la propriété N_3 : ona

$$|x + y| = \sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2|x||y| + y^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y|$$

On remarque qu'il y a égalité dans cette majoration si et seulement si $xy = |xy|$, c'est-à-dire lorsque x et y sont de même signe.$\square$

Comme conséquence, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1. *1. Si $a \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$*

2. On a l'inégalité $||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

1. Par hypothèse, si $|x| \leq a$ alors : si $x \geq 0$, $x = |x| \leq a$, si $x \leq 0$, $|x| = -x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a$ d'où $-a \leq x \leq 0$. Dans tous les cas on a donc $-a \leq x \leq a$.
   Réciproquement, si $-a \leq x \leq a$, $(\Leftrightarrow -a \leq -x \leq a)$ alors : si $x \geq 0, 0 \leq x = |x| \leq a$; si $x \leq 0$, $0 \leq -x = |x| \leq a$. Dans tous les cas on a donc $|x| \leq a$ d'où le résultat d'équivalence.
2. D'après le point (1), on a $||x|-|y|| \leq |x-y| \Leftrightarrow -|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$ d'où les deux inégalités à montrer : $-|x - y| \leq |x| - |y|$ et $|x| - |y| \leq |x - y|$, inégalités équivalentes à $|y| \leq |x| + |x - y|$ et $|x| \leq |y| + |x - y|$. Ces deux dernières inégalités sont vraies comme conséquence de l'inégalité triangulaire ; par exemple $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + x$, idem avec $|x|$ en posant $|x| = |x - y + y|$. □

Pour compléter les règles précédentes, nous donnons maintenant deux caractérisations concernant l'égalité d'un réel avec 0, d'une part, et la relation d'ordre $\leq$ entre deux réels d'autre part. Ces caractérisations sont très pratiques car, souvent, quand on fait de l'analyse réelle, les nombres que l'on manipule sont formels et ont des propriétés connues "à ε près".

Corollaire 2. *1. Pour $a \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence : $a = 0 \Longleftrightarrow |a| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.*

2. Pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $a \leq b \Longleftrightarrow a \leq b + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.

Démonstration.

1. Si $a = 0$, alors $0 = a = |a| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Montrons la propriété réciproque ($|a| \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$) par contraposition : si $a \neq 0$ on pose $\varepsilon_0 = \dfrac{|a|}{2} > 0$ et on a alors $|a| = 2\varepsilon_0 > \varepsilon_0$.
2. Si $a \leq b$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $b \leq b+\varepsilon$ d'où $a \leq b \leq b+\varepsilon$. Montrons également la propriété réciproque ($a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$) par contraposition : si $a > b$ (négation de $a \leq b$) alors en posant $\varepsilon_0 = \dfrac{a-b}{2}$ on a $b + \varepsilon_0 = b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{b+a}{2} < \dfrac{a+a}{2} = a$.□

Exemples - Pour deux réels a et b quelconques nous pouvons exprimer le plus grand (resp. petit) des deux, en fonction de a, b et de la valeur absolue de la différence $|a - b|$, de la façon suivante :

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|), \quad \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

3.2 Partie entière

Propriétés 1. *$\mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante ; dite d'Archimède :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x \leq ny$$

*On dit aussi que $\mathbb{R}$ **est un corps archimèdien**.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x > ny$. Soit $A = \{ny/n \in \mathbb{N}^*\}$, A est non vide (contient y) et majoré par x, donc A admet une borne supérieure. Soit $b = \sup(A)$, on a $b - y < b$ donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b - y < n_0 y$, d'où $b < (n_0+1)y$ ce qui est absurde car $(n_0+1)y \in A$.$\square$

Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel :

Proposition 3.2. *(et définition)*
Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif p, tel que :

$$p \leq x < p+1$$

p est appelé la partie entière de x et noté $E(x)$ ou parfois $[x]$.

Exemples - $E(13) = 13$, $E(3,9) = 3$, $E(-2) = -2$, **mais attention** $E(-7,4) = -8$ (**et non pas**) -7
Démonstration. **Existence.** Si $x \geq 0$, par la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq n$. Soit l'ensemble K définie par

$$K = \{k \in \mathbb{N} | k \leq x\}$$

K est donc fini (car pour tout k dans K, on a $k < n$). Il admet donc un plus grand élément $k_{max} = \max K$. On alors $k_{max} \leq x$ car $k_{max} \in K$, et $k_{max} + 1 > x$ car $k_{max} + 1 \notin K$. Donc

$$k_{max} \leq x < k_{max} + 1$$

et on prend donc $E(x) = k_{max}$.
Si $x \leq 0$, l'entier $E(x)$ défini par $E(x) = \begin{cases} -E(-x) - 1 & si\ x \notin \mathbb{Z} \\ -E(-x) & si\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ convient.

Unicité. Si k et l sont deux entiers relatifs vérifiant $k \leq x < k+1$ et $l \leq x < l+1$, on a donc $k \leq x < l+1$, donc par transitivité $k < l+1$. En échangeant les rôles de l et k, on a aussi $l < k+1$. On en conclut que $l - 1 < k < l + 1$, mais il n'y a qu'un seul entier compris strictement entre $l-1$ et $l+1$, c'est l. Ainsi $k = l$.$\square$

Remarque 3.2.
- *A partir de la démonstration, on peut remarquer, que $E(x)$ est le plus grand entier n tel que $n \leq x$. De même, $E(x) + 1$ est le plus petit entier m tel que $x < m$.*
- *La fonction $x \longmapsto E(x)$ est une fonction croissante, continue en tout point non entier, continue à droite en un point entier.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l' inégalité suivante, très utile en pratique*

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

3.3 Application : Approximations décimales

Parmi les rationnels, les décimaux ont un rôle pratique important, leur intérêt est d'approcher les réels d'aussi près que l'on veut, ce qui permet les calculs sur les réels.

Définition 3.2. *Un réel d est un nombre décimal s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n d \in \mathbb{Z}$*

Définition 3.3. *Soient x, ε deux réels avec $\varepsilon > 0$.*
- *On appelle **valeur décimal approchée de x à ε près par défaut** l'unique décimal d tel que $d \leq x < d + \varepsilon$.*
- *On appelle **valeur décimal approchée de x à ε près par excès** l'unique décimal d tel que $d - \varepsilon \leq x \leq d$.*

Proposition 3.3. *Soit x un réel. Pour tout n un entier naturel il existe un unique entier q_n tel que*

$$\frac{q_n}{10^n} \leq x < \frac{q_n + 1}{10^n}$$

$\frac{q_n}{10^n}$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-n} près par défaut.

Démonstration. On a :

$$E(x10^n) \leq x10^n < E(x10^n) + 1$$

d'où

$$\frac{E(x10^n)}{10^n} \leq x < \frac{E(x10^n)}{10^n} + 10^{-n}$$

donc $d_1 = E(x10^n)10^{-n}$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-n} près par défaut, et $d_2 = \frac{E(x10^n)}{10^n} + 10^{-n}$ un nombre décimal approchant x à 10^{-n} près par excès. □

3.4 Densité des rationnels et irrationnels dans $\mathbb{R}$

Nous avons vu que l'ensemble des nombres rationnels est contenu dans l'ensemble des réels. Nous allons montrer que tout nombre réel peut être approché d'aussi près que l'on veut par un rationnel (on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) et que pour tout rationnel il existe un irrationnel aussi près que l'on veut de celui-ci.

Définition 3.4. (densité) *Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y,\ \exists d \in D;\ x < d < y$$

Voici une autre définition équivalente (et très utile) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists d \in D, \quad |x - d| < \varepsilon$$

Théorème 3.1. *Soit D une partie dense dans $\mathbb{R}$, x et y deux réels teld que $x < y$. Il existe une infinité d'éléments de D entre x et y.*

Démonstration. Soit $I = \{d \in D,\ x < d < y\}$. Puisque D est dense dans $\mathbb{R}$, I est non vide. Supposons que I est fini. Il existe, alors un entier $n > 0$ tel que $I = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$.
On pourrait les classer par ordre croissant : $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$; l'intervalle $]x, d_1[$ ne contiendrait aucun élément de D, ce qui contredirait le théorème précédent.

Théorème 3.2. *L'ensemble des nombres rationnels* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Il suffit de trouver un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que

$$a < \frac{p}{q} < b.$$

Soit $y = b - a > 0$ et $x = 1$. D'apès la propriété d'Archimède, il existe un entier q tel que

$$q(b-a) > 1 \quad \Longrightarrow \quad qa + 1 < qb.$$

Soit $p = [qa] + 1$. On a alors

$$qa < p \leq qa + 1 < qb.$$

En divisant par q on a le résultat désiré.

Théorème 3.3. *L'ensemble des nombres irrationnels* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. TD.